Les systèmes formels (SF)

1) Les dominos : un exemple simple de système formel (SF)

1.A) Une variante du jeu de dominos pour illustrer le cours

Afin d'expliquer simplement la notion de système formel, commençons par illustrer ce domaine par un exemple simple : une variante allégée du jeu de dominos, où nous posons les pièces, de gauche à droite, et sur une seule ligne. En jouant ainsi, nous obtenons une unique rangée de pièces horizontales.

1	2	2	3	3	4

1 - Trois pièces juxtaposées

1.B) État du système

Par convention, l'état du système, i.e. l'état dans lequel le système se trouve, est donné par la partie droite de la dernière pièce posée. Dans l'exemple ci-contre, le système est dans l'état 3 : [| 3] ; et dans celui ci-dessus, il est dans l'état 4 : [| 4] .

1	2	2	3

2 - L'état du système est 3

1.C) État de départ du système

a) Étape 0 : départ

Le joueur commence à partir de rien, et pose, par exemple, cette première pièce : [1 | 2] . Ainsi elle fournit l'état de départ : le système est dans l'état 2 : [| 2] .

1	2

3 - L'état de départ est 2

1.D) Les différentes pièces

Pour jouer nous disposons des 5 pièces illustrées sur la gauche.

1	2
2	3
3	4
4	5
5	1

4 - les pièces utilisables

1.E) Comment jouer ?

Au départ, le joueur tient ses pièces dans la main. Il doit poser une pièce sur le tapis, à droite du domino [1 | 2] qui donne l'état de départ. La condition qui autorise ce geste est que la partie gauche de la pièce à poser, corresponde à l'état dans lequel nous sommes, i.e. dans notre exemple, l'état 2 : [| 2] .

a) Étape 1

Le joueur peut seulement poser la pièce [2 | 3] ; le nouvel état du système est donné par sa partie gauche : 3.

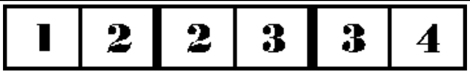
Ainsi il passe à l'état 3 : [| 3] .

1	2	2	3

5 - Maintenant le système est à l'état 3

b) Étape 2

Le joueur pose la pièce : [3|4] ; ainsi le système passe à l'état 4 : [|4] .



6 - Le système est passé à l'état 4

c) Étape 3

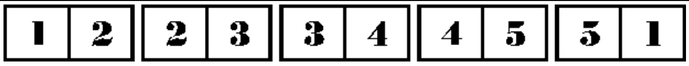
Le joueur pose : [4|5] ; le système passe à l'état 5 : [|5] .

7 - Maintenant le système est passé à l'état 5

1.F) Étape 4 : fin de la partie

Pour respecter la théorie, disons que la partie sera terminée dans un des 3 cas suivants :
- Quand il ne reste plus de pièce dans la main du joueur,
- Quand il ne peut pas (plus) en poser une.
- Quand l'état du système est 1.

Le joueur pose : [5|1] ; et ceci fait passer le système à l'état 1 : [|1] . La partie est terminée pour deux raisons : le joueur a posé toutes ses pièces et le système est à l'état final 1 : [|1] .



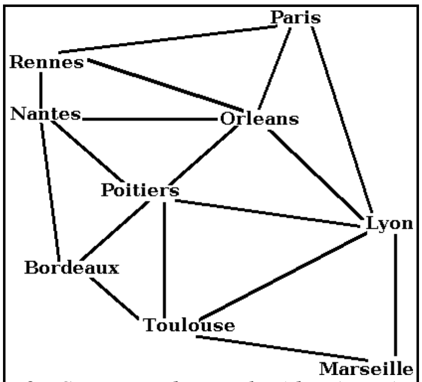
8 - Ici le système est arrivé à son état final : 1

1.G) Notion de graphe et de réseau

Le terme graphe est le nom mathématique de ce que nous appelons dans la vie courante un réseau (Ex : réseau ferré, routier).

Sa structure est celle de nœuds (les villes) reliés/étiquetés par des liens (les rails, la route).

Si le lien possède un sens, alors nous disons que le graphe est orienté.



9 - Structure de graphe (de réseau)

1.H) Conclusion

Ainsi, dans la partie de dominos précédente, nous obtenons une séquence qui décrit les états 2, 3, 4, 5 et 1.

Nous avons appliqué les règles séquentiellement : i.e. une règle après l'autre. Donc, pour représenter cette séquence, nous utilisons un graphe orienté, et nous dessinons ceci :

10 - Séquence obtenue

2) Description d'un système formel

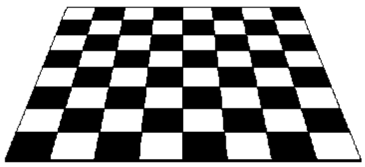
2.A) Historiquement les systèmes formels viennent des mathématiciens

Au début du siècle dernier, en 1900, dans un congrès de mathématiques qui se tient à Paris, David Hilbert, un mathématicien célèbre pose 23 problèmes à ses contemporains. Un de ces problèmes est ensuite résolu par Kurt Goëdel, qui démontre le théorème d'incomplétude[1]. Pour palier la crise des mathématiques induite par cette démonstration, Russell et Whitehead [RW 1910] refondent les mathématiques à partir des systèmes formels logiques. Ensuite viendront, Church, Herbrand, et surtout Turing [Tur 1950].

2.B) Définition

Un système formel est un jeu séquentiel où, selon des règles, nous manipulons des symboles afin de voir les séquences décrites, et quelles configurations nous pouvons obtenir. Bon nombre de jeux, basés sur des composants digitaux, sont ni plus ni moins des systèmes formels : dames, échecs, cartes. D'autres n'en sont pas car ils sont basés sur des composants analogiques : foot, billes, billard.

2.C) Composition d'un système formel



11 - Grille de jeu de dames

a) Les symboles manipulés

Les symboles utilisés peuvent être divers : pions aux dames, les pièces aux échecs, marques au morpion, cartes pour les jeux de cartes (belote, rami, poker, bridge, tarot...).

b) Les symboles manipulés sont digitaux

La fonction des symboles est portée par des dessins, des marques ou des sculptures, mais elle demeure indépendante de l'état des supports. A la belote, une carte lacérée représentant un roi reste toujours plus forte qu'une carte flambant neuf qui représenterait un 7. Aux échecs, une pièce sculptée en or massif se fait prendre si elle tombe dans le champ d'une autre.

A l'inverse, dans les jeux analogiques, par exemple au football, un vent fort peut contrarier un tir, et un joueur peut glisser dans la boue. Cela tient au fait que le foot n'est pas un jeu digital, mais analogique.

c) Les diverses manipulations

Les manipulations de symboles que nous effectuons sont diverses : nous pouvons seulement les poser comme aux cartes, les déplacer comme aux dames, les transformer par une promotion comme aux échec. Au morpion, une marque dessinée est définitive.

d) Les joueurs sont finis

Il est exclu de trouver une solution qui ferait appel à une procédure infinie.

1 Toute axiomatique incluant le système d'axiomes de l'arithmétique est incomplète : elle peut produire des théorèmes indécidables, i.e. qui ne peuvent pas être démontrés dans un temps fini.

2.D) Description d'un système formel

a) Décrire en quoi consistent les symboles

Par exemple c'est présenter à un enfant, les différentes pièces d'un échiquier ou les différentes cartes d'un jeu.

b) Description des configurations de symboles

Description de(s) configuration(s) de symboles au départ

Aux échecs et aux dames nous partons toujours avec des configurations symétriques pour que les deux joueurs soient à égalité.

Ce n'est pas forcé de préciser une configuration gagnante

Dans le cadre du jeu de société, c'est seulement pour donner de l'intérêt au jeu en suscitant la compétition que nous devons décrire des configurations gagnantes, mais la chose n'est pas toujours nécessaire.

De même en IA, il n'est pas toujours nécessaire de préciser une configuration gagnante, mais dans certains domaines (planification, sémantique, philosophie de l'action...) ceci donne un but au système, et permet de le rendre finaliste, téléologique.

c) Description des coups permis (les règles du jeu)

Décrire les conditions de l'action

C'est décrire à quelles conditions nous pouvons jouer. Elles sont formelles, i.e. l'analyse de la configuration de l'action se fait en deux temps :

<u>Lecture formelle des symboles de base</u>

Nous les identifions d'abord par la lecture de la forme des symboles de base (roi, as, cavalier, jeton, pion).

<u>Vérification des conditions d'application</u>

Et ensuite, en vérifiant l'existence de relations logiques et/ou arithmétiques entre ces symboles, nous vérifions si un coup est permis, i.e. si les conditions de déplacement, de prise ou de promotion sont vérifiées.

d) Décrire les transformations du système lors de l'action

Ensuite, il faut décrire l'action, i.e. comment nous pouvons jouer. C'est décrire comment les pièces transforment l'état du jeu quand elles se déplacent, prennent et sont promues.

e) Important : dans un jeu digital la légalité d'un coup est arbitrable sans discussion

Le grand intérêt des systèmes formels est le déterminisme des applications des transformations. Dans leur domaine, il n'existe pas d'ambiguïté à propos d'un coup à jouer. Toutes les règles du jeu sont formelles : elles sont basées sur la forme des symboles élémentaires du système. Ainsi la légalité d'un coup est facilement arbitrable : il est légal ou ne l'est pas ; à cela il n'existe pas d'alternative, et la discussion s'arrête net !

Ainsi nous évitons les problèmes d'arbitrage qui s'avèrent récurrents dans les jeux analogiques (foot hand rugby...). Dans les jeux de société, cet aspect formel se révèle intéressant pour la quiétude de la vie familiale ! De même, cette facilité d'arbitrage devient importante en mathématiques, car elle permet d'analyser sans ambiguïté la viabilité d'une théorie.

3) Conclusion

Au moyen de ces exemples concrets, nous venons d'apprendre les bases des systèmes formels de façon récréative. Ensuite ces notions seront bien pratiques afin de formaliser le vaste domaine de l'IA que nous abordons dans ce cours.

4) Bibliographie

[Hau 1989] John Haugeland,
L'Esprit dans la machine, Fondements de l'intelligence artificielle,
Odile Jacob, 1989.

[RW 1910] William Russell, Alfred Whitehead,
Principia Mathematica,
1910, 12 et 13, Cambridge University Press, 1910.

[Tur 1950] Alan Mathison Turing,
Computing Machinery and Intelligence,
Mind, 1950.

Sommaire