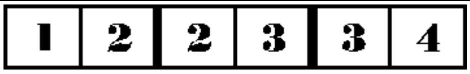
Les dominos : un exemple simple de système formel

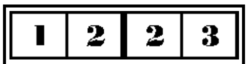
Une variante du jeu de dominos pour illustrer le cours

Afin d'expliquer simplement la notion de système formel, commençons par illustrer ce domaine par un exemple simple : une variante allégée du jeu de dominos où on pose les pièces, de gauche à droite, et sur une seule ligne. En jouant ainsi, on obtient une unique rangée de pièces horizontales.



1) Trois pièces juxtaposées

État du système :



2) L'état du système est 3

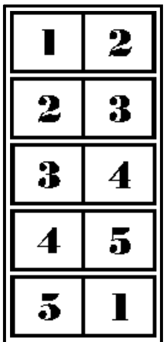
Par convention, l'état du système, i.e. l'état dans lequel le système se trouve est donné par la partie droite de la dernière pièce posée. Dans l'exemple ci-dessus, le système est dans l'état 4, et dans celui ci-contre, il est dans l'état 3.

État de départ du système :

3) L'état de départ est 2

Étape 0 : départ

Le joueur commence à partir de rien, et pose, par exemple, cette première pièce [1|2]. Ainsi elle fournit l'état de départ. Le système est dans l'état 2.



4 les pièces utilisables

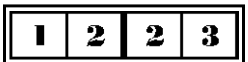
Les différentes pièces :

Pour jouer nous disposons des 5 pièces illustrées ci-contre :

Comment jouer ?

Au départ, le joueur tient ses pièces dans la main. Il doit poser une pièce sur le tapis, à droite de celle qui donne l'état de départ. La condition qui autorise ce geste est que la partie gauche de la pièce à poser corresponde à l'état dans lequel on est, i.e. dans notre exemple, l'état 2.

Étape 1

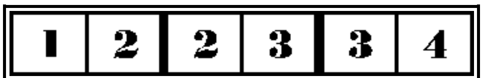


5) Maintenant le système est à l'état 3

Le joueur peut seulement poser la pièce [2|3]. Le nouvel état du système est donné par sa partie gauche : 3. Ainsi il passe à l'état 3.

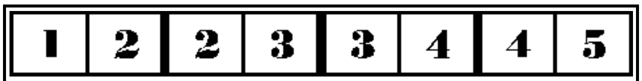
Étape 2

Le joueur pose la pièce [3|4]. Ainsi le système passe à l'état 4.



6) Le système est passé à l'état 4

Étape 3



7) Maintenant le système est passé à l'état 5

Le joueur pose la pièce [4|5] : le système passe à l'état 5.

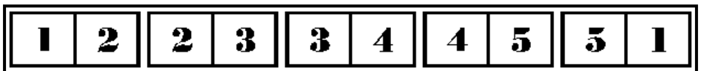
Fin de la partie

Pour respecter la théorie, disons que la partie sera terminée dans un des 3 cas suivants :

- Quand il ne reste plus de pièce dans la main du joueur,
- Quand il ne peut pas en poser une.
- Quand l'état du système est 1.

Étape 4

Le joueur pose la pièce [5|1]. Ainsi le système passe à l'état 1. La partie est terminée pour deux raisons : le joueur a posé toutes ses pièces et le système est à l'état final 1.



8) Ici le système est arrivé à son état final 1

Conclusion

Ainsi on a obtenu une séquence qui a décrit les états 2, 3, 4, 5 et 1.

Description d'un système formel

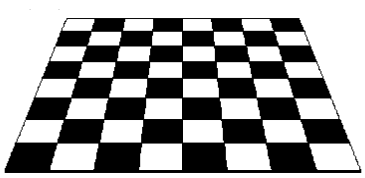
Historiquement les systèmes formels viennent des mathématiciens

Au début du siècle dernier, en 1900, dans un congrès de mathématiques qui se tient à Paris, David Hilbert, un mathématicien célèbre pose 23 problèmes à ses contemporains. Un de ces problèmes est ensuite résolu par Kurt Goëdel, qui démontre le théorème d'incomplétude[1]. Pour palier la crise des mathématiques induite par cette démonstration, Russel et Whitehead refondent les mathématiques à partir des systèmes formels logiques. Ensuite viendront, Church, Herbrand, et surtout Turing.

Définition

Un système formel est un jeu séquentiel où, selon des règles, on manipule des symboles afin de voir quelles séquences on décrit, et quelles configurations on peut obtenir. Bon nombre de jeux, basés sur des composants digitaux, sont ni plus ni moins des systèmes formels : dames, échecs, cartes. D'autres n'en sont pas car ils sont basés sur des composants analogiques : foot, billes, billard.

Composition d'un système formel


9) Grille de jeu de dames

1) Les symboles manipulés

Les symboles utilisés peuvent être divers : pions aux dames, les pièces aux échecs, marques au morpion.

1 Toute axiomatique incluant le système d'axiome de l'arithmétique est incomplète : elle peut produire des théorèmes indécidables, i.e. qui ne peuvent pas être démontrés dans un temps fini.

2) Les symboles manipulés sont digitaux

La fonction des symboles est portée par des dessins, des marques ou des sculptures, mais elle est indépendante de l'état des supports. A la belote, une carte lacérée représentant un roi reste toujours plus forte qu'une carte flambant neuf qui représenterait un 7. Aux échecs, une pièce sculptée en or massif se fait prendre si elle tombe dans le champ d'une autre.

A l'inverse, dans les jeux analogiques, par exemple au football, un vent fort peut contrarier un tir, et un joueur peut glisser dans la boue. Cela tient au fait que le foot n'est pas un jeu digital, mais analogique.

3) Les diverses manipulations

Les manipulations de symboles qu'on effectue sont diverses : on peut seulement les poser comme aux cartes, les déplacer comme aux dames, les transformer par une promotion comme aux échec. Au morpion, une marque dessinée est définitive.

4) Les joueurs sont finis

Il est exclu de trouver une solution qui ferait appel à une procédure infinie.

Description d'un système formel

1) Décrire en quoi consistent les symboles

Par exemple c'est présenter à un enfant, les différentes pièces d'un échiquier ou les différentes cartes d'un jeu.

2) Description des configurations de symboles

Description de(s) configuration(s) de symboles au départ

Aux échecs et aux dames on part toujours avec des configurations symétriques pour que les deux joueurs soient à égalité.

Ce n'est pas forcé de préciser une configuration gagnante

C'est seulement pour donner de l'intérêt au jeu en suscitant la compétition qu'on s'attache à décrire des configurations gagnantes, mais ce n'est pas nécessaire.

3) Description des coups permis (les règles du jeu)

Décrire les conditions de l'action

C'est décrire à quelles conditions on peut jouer. Elles sont formelles, i.e. l'analyse de la configuration de l'action se fait en deux temps :

Lecture formelle des symboles de base

On les identifie d'abord par la lecture de la forme des symboles de base (roi, as, cavalier, jeton, pion).

Vérification des conditions d'application

Et ensuite, en vérifiant l'existence de relations logiques et/ou arithmétiques entre ces symboles, on vérifie si un coup est permis, i.e. si les conditions de déplacement, de prise ou de promotion sont vérifiées.

4) Décrire les transformations du système lors de l'action

Ensuite, il faut décrire l'action, i.e. comment on peut jouer. C'est décrire comment les pièces transforment l'état du jeu quand les pièces se déplacent, prennent et sont promues.

Note très importante : dans un jeu digital la légalité d'un coup est arbitrable sans discussion

Le grand intérêt des systèmes formels est le déterminisme des applications des transformations. Dans leur domaine, il n'existe pas d'ambiguïté à propos d'un coup à jouer. Toutes les règles du jeu sont formelles : elles sont basées sur la forme des symboles élémentaires du système. Ainsi la légalité d'un coup est facilement arbitrable : il est légal ou ne l'est pas ; à cela il n'existe pas d'alternative, et la discussion s'arrête net !

Ainsi on évite les problèmes d'arbitrage qui s'avèrent récurrents dans les jeux analogiques (foot hand rugby...). Dans les jeux de société, cet aspect formel se révèle intéressant pour la quiétude de la vie familiale ! De même, cette facilité d'arbitrage devient importante en mathématiques, car elle permet d'analyser sans ambiguïté la viabilité d'une théorie.